Université Bordeaux I

U.F.R. Mathématiques et Informatique

Master Recherche de Mathématiques Parcours Spécialisé

Programme des cours

Année 2011/12

Pour plus d'information, contacter le responsable

For more information, contact the coordinator

yuri.bilu@math.u-bordeaux1.fr

Pour l'inscription, contacter le secrétariat

For inscription, contact the secretary

christine.parison@math.u-bordeaux1.fr

Le site internet du Parcours Spécialisé se trouve à l'adresse

The internet site of the master programme is

http://www.u-bordeaux1.fr/ufr/math-info/formation/mathematiques-pures/master/mathematiques-approfondies/master-2-parcours-specialise.html

Pour plus de renseignement concernant le Master ALGANT, dans le cadre duquel une partie des cours ont lieu, voir l'adresse

For the Master ALGANT program, sponsoring part of the courses, see

http://www.algant.eu

Premier Semestre

Théorie des nombres	Denis Benois	Number Theory
Arithmétique algorithmique	Jean-Marc Couveignes	Algorithmic Number Theory
Algèbre non commutative	Boas Erez	Non-commutative algebra
Géométrie algébrique	Qing Liu Jilong Tong	Algebraic Geometry
Opérateurs sur les espaces de Lebesgue et de Hardy	Mohamed Zarrabi	Operators on Lebesgue and Hardy spaces

Second Semestre

Théorie analytique des nombres	Pascal Autissier	Analytic Number Theory
Algèbres de Lie et Groupes de Lie	Christophe Bavard	Lie Groups and Lie Algebras
Géométrie tropicale et amibes	Alain Yger	Tropical Geometry and Amoebas
Opérateurs d'intégrales singulières et transformées de Riesz	El Maati Ouhabaz	Singular Integral Operators and Riesz Transforms
Introduction aux courbes elliptiques	Jean Gillibert	Introduction to Elliptic Curves

Les cours sont rédigés en anglais

The courses are taught in English

Théorie des Nombres | N1MA9111 | Number theory

Cours du semestre 9 (M2, semestre d'automne) Denis BENOIS

Résumé. Ce cours est une introduction en théorie algébrique des nombres. Les thèmes suivants seront abordés :

1) Anneaux de Dedekind et la théorie de factorisation.
2) Valuations et corps locaux.
3) L'arithmétique des corps de nombres : groupe de classes, unités (théorème de Dirichlet), exemples.
4) Fonction zêta de Dedekind
5) Introduction à la théorie du corps de classes.

Abstract. This course is a background in Algebraic Number theory. The following topics will be covered:

1) Dedekind rings and factorization theory.
2) Valuations and local fields.
3) The arithmetic of number fields: the ideal class group, the group of units (Dirichlet theorem), examples.
4) Dedekind zeta function
5) An introduction to class field theory.

Références / Bibliography

Z. Borevich, I. Shafarevic: *Number theory, Academic Press, N.Y., 1966*

J. Neukirch: *Algebraic Number theory, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 322, 1999*

P. Samuel: *Théorie algébrique des nombres, Hermann, Paris, 1967*

Arithmétique algorithmique | N1MA9112 | Algorithmic Number Theory

Cours du semestre 9 (M2, semestre d'automne) — Jean-Marc COUVEIGNES

Résumé. Le cours utilisera comme fil rouge les algorithmes classiques et modernes de factorisation pour présenter des idées et techniques importantes en théorie algorithmique des nombres. On discutera de la réduction des $\mathbb{Z}$-modules et des réseaux, de la factorisation de polynômes en une variable sur un corps fini, sur les rationnels et sur un corps de nombres, puis on parlera de tests de primalité (jusqu'à l'algorithme de primalité basé sur les courbes elliptiques), et d'algorithmes de factorisation (jusqu'au crible algébrique). Pendant tout le cours, l'accent sera mis sur les idées importantes, par opposition aux détails techniques, nécessaires pour des implémentations efficaces.

Abstract. The course uses classical and modern factorization algorithms to present important ideas and techniques in computational number theory. We will cover the reduction of $\mathbb{Z}$-modules and lattices, factorization of univariate polynomials over finite fields, the rationals and number fields, then primality testing (up to the Elliptic Curve Primality Proving algorithm) and integer factorization (up to the Number Field Sieve). The emphasis is on important ideas throughout, as opposed to technical details necessary for efficient implementation.

Prerequisites. In the last part, basic facts about elliptic curves (over $\mathbb{C}$ and a finite field) and algebraic number theory (splitting of primes, class groups) will be sketched then assumed.

Références / Bibliography

J. von zur Gathen, J. Gerhard: *Modern computer algebra*, Cambridge University Press, New York, 1999.

H. Cohen: *A course in computational algebraic number theory*, Springer-Verlag, 1996.

R.Crandall, C. Pomerance: *Prime Numbers, a computational perspective*, Springer, 2005.

Course notes from the last year are available at

`http://www.math.u-bordeaux1.fr/~cerri/articles/book.pdf`

Algèbre non-commutative. N1MA9115 Non-commutative algebra.

Cours du semestre 9 (M2, semestre d'automne) Boas EREZ

Résumé. Dans la première partie du cours, nous allons parcourir la théorie des représentations linéaires des groupes finis, pour motiver l'étude de la structure des algèbres de dimension finie sur un corps.

La deuxième partie approfondira cette étude, et une troisième partie du cours sera consacrée aux éléments de la cohomologie des groupes et de la K-théorie algébrique, en lien avec les sujets traités précédemment.

Si nous aurons le temps, nous terminerons en indiquant quelques développements et problèmes récents liés aux sujets du cours.

Abstract. In the first part of the course, we will go over the theory of linear representations of finite groups, in order to motivate the study of the structure of finite dimensional algebras over a field.

The second part will deepen this study, and a third part of the course will be devoted to the elements of group cohomology and of algebraic K-theory, as a development of the previous topics.

If time permits, we will indicate some recent advances and problems related to the subject of the course.

Références / Bibliography

A. Blanchard: *Les corps non commutatifs*, Presses Universitaires de France, Paris, 1972.

J. Milnor: *Introduction to algebraic K-theory*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1971.

W. Scharlau: *Quadratic and Hermitian forms*, Grundlehren der Math. Wiss., 270, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo, 1985.

J-P. Serre: *Représentations linéaires des groupes finis*, Hermann, Paris, 1978 (exists in English)

Résumé. Il s'agit d'une introduction aux variétés algébriques.
(1) Préliminaires en algèbre commutative (produit tensoriel, localisation).
(2) Ensembles algébriques ; topologie de Zariski ; variétés affines.
(3) Faisceaux.
(4) Variétés algébriques abstraites, morphismes.
(5) Dimension.
(6) Produit ; extension de scalaires ; Frobenius.
(7) Lissité et critère jacobien ; normalization.
(8) Courbes algebriques.
(9) Diviseurs.
(10) Formes différentielle ; Riemann-Roch.

Abstract. This course is an introduction to algebraic varieties.
(1) Preliminary on commutative algebra (tensor product, localization)
(2) Algebraic sets; Zariski topology. Affine varieties.
(3) Sheaves
(4) Abstract algebraic varieties, morphisms.
(5) Dimension.
(6) Product; base change; Frobenius.
(7) Smoothness and Jacobian criterion; Normalization.
(8) Algebraic curves.
(9) Divisors.
(10) Differential forms; Riemann-Roch.

Références / Bibliography.

[1] W. Fulton : *Algebraic curves, an introduction to algebraic geometry.* Benjamin, W.A., 1969. - (Mathematics lecture notes series).
[2] R. Hartshorne : *Algebraic geometry.* Graduate Texts in Mathematics, **52**. Springer Verlag, 1977.
[3] I. Shafarevich : *Basic algebraic geometry*, I, second and expanded edition, Springer (1994)

Opérateurs sur les espaces de Lebesgue et de Hardy N1MA9113 Operators on Lebesgue and Hardy spaces

Cours du semestre 9 (M2, semestre d'automne) Mohamed ZARRABI

Résumé. Il s'agit d'une introduction aux espaces de Hardy et à des opérateurs fondamentaux sur ces espaces et les espaces de Lebesgue. On s'intéressera au shift, aux matrices/opérateurs de Hankel et de Toeplitz et à la transformation de Hilbert.

Programme.

1. Espaces de Hardy.
2. Factorisation des fonctions (fonctions intérieures et extérieures).
3. Sous-espaces invariants par le shift.
4. Opérateurs de Hankel et de Toeplitz.
5. Interpolation.
6. Transformation de Hilbert.

Abstract. This is an introduction to Hardy spaces and fundamental operators on both these spaces and the Lebesgue spaces. We consider the shift operator, the Hankel and the Toeplitz matrix/operators and the Hilbert transform.

Programm.

1. Hardy spaces.
2. Factorisation of functions (inner and outer functions).
3. Invariant subspaces for the shift operator.
4. Hankel and Toeplitz operators.
5. Interpolation.
6. Hilbert transform.

Références / Bibliography

K. Hoffman: *Banach spaces of analytic functions*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J. 1962.

Y. Katznelson: *An Introduction to Harmonic Analysis*, Wiley, New York, 1968.

N. K. Nikolski: *Operators, functions, and systems : an easy reading. Vol. 1. Hardy, Hankel, and Toeplitz*, Mathematical Surveys and Monographs, 93. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

J.R. Partington: *An introduction to Hankel operators*, London Mathematical Society Student Texts, 13. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

V. Peller: *Hankel operators and their applications*, Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2003.

Cours du semestre 10 (M2, semestre de printemps) Pascal AUTISSIER

Résumé.

1) Caractères : sommes de Gauss, nombre de solutions d'équations sur les corps finis ;

2) Théorème des nombres premiers : estimation de Tchébychev, preuve du TNP par l'analyse complexe (formule de Perron) ;

3) Fonction gamma et fonction zêta : formules de Stirling généralisée et de duplication, équation fonctionnelle ;

4) Théorème de la progression arithmétique : fonctions L, Dirichlet ;

5) Caractères primitifs : somme de Gauss, théorème de Polya-Vinogradov ;

6) Liens avec la théorie algébrique : réciprocité quadratique, fonction zêta de Dedekind, théorème de Dirichlet, énoncé du théorème de Chebotarev ;

7) Le grand crible : applications à Brun-Titchmarsh, aux nombres premiers jumeaux, à Linnik ;

8) Sommes trigonométriques : formule de Poisson, théorèmes de van der Corput et de Voronoï, le problème du cercle.

Abstract.

1) Characters: Gauss sums, number of solutions of equations on finite fields;

2) Prime numbers theorem: Tchebychev estimate, proof of the PNT via complex analysis (Perron formula);

3) Gamma function and zeta function: generalized Stirling and duplication formulas, functional equation;

4) Arithmetic progression theorem: L functions, Dirichlet;

5) Primitive characters: Gauss sum, Polya-Vinogradov theorem;

6) Link with the algebraic theory: quadratic reciprocity, Dedekind zeta function, Dirichlet theorem, statement of the Chebotarev theorem;

7) The large sieve: applications to Brun-Titchmarsh, to the twin prime numbers, to Linnik;

8) Trigonometric sums: Poisson formula, van der Corput and Voronoï theorems, the circle problem.

Algèbres de Lie et Groupes de Lie	N1MA0115	Lie Algebras and Lie Groups
Cours du semestre 10 (M2, semestre de printemps)		Christophe BAVARD

Abstract.
Lie algebras.

- Nilpotent and solvable Lie algebras.
- Lie and Engel theorems.
- Semi-simplicity. Cartan subalgebras.
- Root systems.
- Classification of semi-simple Lie algebras (complex case).

Lie groups.

- The Lie algebra of a Lie group.
- The exponential map.
- Lie subgroups. Cartan's theorem.
- Adjoint representation
- Semi-simple Lie groups

Symmetric spaces.

- Orthogonal symmetric Lie algebras. Duality
- Symmetric spaces.
- Noncompact type (compacts subgroups, Iwasawa decomposition)
- Compact type
- Classifications

Résumé. L'*amibe* (archimédienne) d'un polynôme de Laurent $P \in \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, ..., X_n^{\pm 1}]$ (ou plus généralement d'un idéal de $\mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, ..., X_n^{\pm 1}]$) est par définition l'image de la variété algébrique $V(P)$ de ses zéros dans $(\mathbb{C}^*)^n$ par l'application Log $: \zeta \mapsto (\log|\zeta_1|, ..., \log|\zeta_n|)$; sa *coamibe* est l'image de l'ensemble $V(P)$ par l'application arg $: \zeta \mapsto (\arg \zeta_1, ..., \arg \zeta_n) \in (\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}))^n$. Dans le cadre des hypersurfaces, l'introduction (par L.A. Ronkin en 2000) d'une fonction convexe affine sur les composantes connexes du complémentaire de l'amibe permet d'attacher à P une *amibe non archimédienne.* Au cadre de la géométrie algébrique complexe classique (dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ou plus particulièrement dans le plan projectif $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$) se substitue alors celui de la géométrie algébrique cette fois réelle dans $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\})^n$, où addition et prise de sup remplacent respectivement multiplication et addition (il s'agit aussi de l'algèbre *max-plus* des informaticiens). C'est l'univers de la *géométrie tropicale.* Suivant l'approche de G. Mikhalkin, on dégagera le concept de *courbe tropicale* (pensée ici comme un graphe équipé d'une métrique) et l'on transposera au contexte tropical les résultats majeurs de la géométrie algébrique sur les surfaces de Riemann (théorème d'Abel-Jacobi, de Riemann-Roch,...). Des questions relevant de la *géométrie énumérative* seront envisagées dans ce cadre non archimédien et l'on s'intéressera à la *tropicalisation* d'un certain nombre de questions relevant de la géométrie algébrique classique dans le plan projectif. Le cours sera auto-contenu et ne nécessitera que des connaissances de base en analyse complexe (surfaces de Riemann, fonctions holomorphes d'une et deux variables) et géométrie algébrique (cours de base du premier semestre). L'objectif est de présenter un concept mathématique encore relativement jeune (I.N. Gelfand et *al.*, $\sim$ 1995) et ses articulations avec d'autres champs scientifiques actuels (combinatoire, physique théorique, informatique).

Abstract. The (archimedian) *amœba* of a Laurent polynomial $P \in \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, ..., X_n^{\pm 1}]$ (more generally of an ideal in $\mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, ..., X_n^{\pm 1}]$) consists in the image of its zero set $V(P) \subset (\mathbb{C}^*)^n$ by the logarithmic map Log $: \zeta \mapsto (\log|\zeta_1|, ..., \log|\zeta_n|)$; its *coamœba* is the image of $V(P)$ through the argument map arg $: \zeta \mapsto (\arg \zeta_1, ..., \arg \zeta_n) \in (\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}))^n$. For hypersurfaces, L.A. Ronkin (2000) attached to such an object a convex function which is affine on each connected component of the complementary set, which allows to introduce, besides the archimedian amœba, a non-archimedian companion object, the *non archimedian amœba.* This makes a bridge between classical complex algebraic geometry (let say in $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, especially in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$) and real algebraic geometry in $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\})^n$, where addition and taking sup stand respectively for multiplication and addition (also known as the *max-plus* algebra in computer science). This is the universe of *tropical geometry.* Following G. Mikhalkin's approach, one will explore the concept of *tropical curve* (namely a graph equipped with a metric) and transpose to the tropical context major results from algebraic geometry on Riemann surfaces (Abel-Jacobi, Riemann-Roch theorems,...). Some questions relevant to enumerative geometry (in the projective complex plane) will be *tropicalized.* The course will be self-contained and will only require some basic knowledge in complex analysis (Riemann surfaces, holomorphic functions in one or two variables) and algebraic geometry (basic course, first semester). The goal is to present a relatively new concept (I.M. Gelfand and *al.*, $\sim$ 1995), together with its articulations with other actual scientific fields (combinatorics, theoretical physics, computer science).

Références / Bibliography

I. M. Gelfand, M. M. Kapranov and A. V. Zelevinsky: Discriminants, Resultants and Multidimensional Determinants, Mathematics : Theory and Applications. Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 1994.

G. Mikhalkin: *Amœbas of algebraic varieties and tropical geometry* : Differential faces of geometry, Int. Math. Series (N.Y), **3**, Kluwer, 2004, 257–300.

G. Mikhalkin: *Enumerative tropical geometry in* $\mathbb{R}^2$, J. Amer. Math. Soc **18** (2005), 2, 313–377.

M. Passare, H. Rullgård: *Amœbas, Monge-Ampère measures, and triangulations of the Newton polytope*, Duke Math. J. **121** (2004), no. 3, 481–507.

K. Purbhoo: *A Nullstellensatz for amoebas*, Duke Math. J. **141** (2008), no. 3, 407–445.

J. Richter-Gebert, T. Theobald and B. Sturmfels: *First steps in tropical geometry* : Idempotent Mathematics and Mathematical Physics, Proceedings Vienna 2003, (editors G.L. Litvinov and V.P. Maslov), American Mathematical Society, Contemporary Mathematics **377** (2005) 289-317.

Opérateurs d'intégrales singulières et transformées de Riesz	N1MA0113	Singular intergal operators and Riesz transforms
Cours du semestre 10 (M2, semestre de printemps)		El Maati OUHABAZ

Résumé. Il s'agit d'introduire des méthodes permettant de prolonger un opérateur donné par un noyau singulier de L^2 à tous les autres L^p. Après les résultats classiques, notamment de Hörmander, nousmontrons des résultats récents, dus en partie à Duong et McIntosh. Ces resultats vont au delà de la théorie classique de Calderon-Zygmund. Nous montrons ensuite comment les utiliser pour obtenir des résultats de bornitude des transformées de Riesz. Une dernier partie de ce cours consiste à introduire et étudier les espaces de Hardy associés à des opérateurs.

Abstract. The aim is to introduce methods which allow to extend a given singular integral operator from L^2 to other L^p-spaces. We review the classical results, due to Hörmander, and explain new development due in part to Duong and McIntosh. The results are beyond the classical theory of Calderon-Zygmund. We show how one applies this theory to prove boundedness of Riesz transforms. A last part of this course is to introduce and study Hardy spaces associated with a given operator.

Références / Bibliography

1- Stein E.M. : Harmonic Analysis. Real-variable Methodes, Orthogonality and Oscilatory intergals. Princeton University Press 1993

2- Auscher P. Necessary and suffisant conditions for the L^p-estimates of Riesz transforms associated to elliptic operators on $\mathbb{R}^n$ and related estimates. Mem. Amer. Mat. Soc. 2007

3- Ouhabaz E.M. Analysis of Heat Equations on Domains, Princeton Univ. Press 2005.

4- Coifman R., Weiss G. Analyse Harmonique non-Commutative sur Certains Espaces de type Homogène. Springer 1971

Cours du semestre 10 (semestre de printemps) Jean GILLIBERT

Résumé. Le but de ce cours est de présenter divers aspects des courbes elliptiques. Après avoir survolé la théorie sur le corps des nombres complexes (fonctions de Weierstrass, séries d'Eisenstein, etc.), nous nous attacherons aux aspects arithmétiques : théorème de Mordell-Weil, fonctions L et conjecture BSD, etc. Si le temps le permet, nous énoncerons le théorème de modularité de Wiles et al.

Le programme du cours :

(1) Courbes planes
(2) Théorie élémentaire des courbes elliptiques
(3) Courbes elliptiques sur C
(4) Arithmétique des courbes elliptiques
(5) Courbes elliptiques et formes modulaires

Le cours se veut introductif. Les rudiments de la géométrie algébrique sont supposés acquis, ainsi qu'une certaine familiarité avec les corps locaux et globaux et leur cohomologie galoisienne.

Abstract. The goal of the course is to give an overview of the theory of elliptic curves. After reviewing briefly the theory over the complex numbers (Weierstrass's elliptic functions, Eisenstein series, etc.), we focus on the arithmetic aspects: Mordell-Weil theorem, L-functions and BSD conjecture, etc. If time permits, we will state the modularity theorem of Wiles et al.

The programme of the course is as follows:

(1) Plane Curves
(2) Basic Theory of Elliptic Curves
(3) Elliptic Curves over the Complex Numbers
(4) The Arithmetic of Elliptic Curves
(5) Elliptic curves and Modular Forms

The course is mostly self-contained. We assume knowledge of basic algebraic geometry, and familiarity with local and global fields and their Galois cohomology.

Références / Bibliography

J.S. Milne: *Elliptic Curves*, BookSurge Publishers, 2006.

J.H. Silverman: *The Arithmetic of Elliptic Curves*, Springer-Verlag, GTM 106, Expanded 2nd Edition, 2009.